# DONNER DU SENS AUX MATHEMATIQUES

**Muriel Fénichel et Nathalie PFAFF**

**édition : Bordas pédagogie**

**Année : 2005**

# première partie : cadre théorique

## Construction des connaissances

1. Le rôle de l'activité de l'élève

principe du constructivisme de Jean Piaget.

« Il importe

a. d'amener l'élève à former les notions et à découvrir lui-même les relations et les propriétés mathématiques, plutôt que de lui imposer une pensée adulte toute faite.

b. d'assurer l'acquisition des notions et des processus opératoires avant d'introduire le formalisme.

c. de ne confier à l'automatisme que les opérations assimilées » Denoel-Gonthier : Jean Piaget 1969.

Les socio-constructivistes (Vigotski et Bruner) apportent la dimension sociale (interactions).

2. La théorie des champs conceptuels

- Selon Vergnaud

**La fonction et la composition des schèmes.**

Le concept de schème désigne l'organisation invariante de la conduite face à une classe de situations. Le schème englobe tout ce qui permet au sujet d'effectuer une action, c'est à dire les prises d'information, les opérations intellectuelles (inférences ou calculs relationnels) engendrées par les prises d'information et les règles d'action développées par les opérations intellectuelles.

Mais l'information doit être traitée. C'est le rôle des invariants opératoires qui modélisent le réel ⇨ c'est le noyau dur de la représentation.

Deux grandes catégories d'invariants opératoires : les concepts en acte et les théorèmes en acte.

Les théorèmes en acte sont des propositions vraies ou fausses souvent implicite dans l'action (ex :

décimaux ⇨ plus il y a de chiffres après la virgule, plus le nombre est grand).
Les concepts en acte sont rarement explicites par les élèves alors même qu'ils sont construits dans l'action (ex : longueur).
Les invariants opératoires représentent la partie immergée de l'iceberg. La partie visible de l'iceberg représente les concepts et théorèmes explicites.
Gérard Vergnaud caractérise un schème de la façon suivante :

invariants opératoires $\xrightarrow{\text{Inférence ou calcul relationnel}}$ Règle d'action ou anticipation ou prédiction

**<u>Première approche de la notion de champ conceptuel :</u>**
« Il serait illusoire de considérer le développement d'un seul concept ou d'une seule compétence (...) Un concept ne renvoie pas habituellement à un seul type de représentation ; une situation ne s'analyse pas avec un seul concept... » Vergnaud 1997 : Le moniteur des mathématiques, résolution de problèmes.

La fonction des signifiants dans la théorie des champs conceptuels
Les supports de la pensée sont les signifiants : les mots, les symboles, les signes...
Ils sont indispensable à la conceptualisation. Leur fonction est triple :
- ils aident à la désignation et donc à l'identification des invariants : objets, propriétés, relations, théorèmes ;
- ils aident au raisonnement et à l'inférence ;
- ils aident à l'anticipation des effets et des buts, à la planification et au contrôle de l'action.

**<u>Le champ conceptuel</u>**
L'analyse du champ conceptuel regroupe l'étude des classes de situations, des invariants opératoires impliqués par celles-ci et les différents signifiants pouvant être mobilisés.
« Un champ conceptuel bien analysé est une mine pour le choix des situations à proposer aux élèves, et pour les aides susceptibles de leur être apportées. » G.Vergnaud : Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schèmes et de champ conceptuel, 1994.

- Selon Mante

« Ainsi, comprendre un concept peut revenir à :
- maîtriser le langage associé à ce concept ;

- connaître les définitions et propriétés relatives à ce concept ;
- maîtriser les savoir-faire associés à ce concept ;
- avoir dépassé les obstacles liés à ce concept ;
- savoir résoudre les problèmes en utilisant ce concept. »

M.Mante : Comment nos élèves apprennent-ils ? Qu'est-ce qui peut favoriser l'apprentissage ?, Math-école, n°187, Institut de mathématiques, Neuchâtel, 1999.

Notre approche de la théorie des champs conceptuels

Notre analyse du champ conceptuel contient trois parties :

- un point théorique sur les différentes définitions et propriétés impliquées ;
- un inventaire assez large des classes de problèmes faisant appel au concept ;
- la description des différentes procédures possibles pour résoudre chaque classe de problèmes.

3. L'apprentissage par situation-problème
   - Selon Brousseau (p.12)
   - Selon Douady (p.13)
   - Selon Peltier (p.13-14)
   - Selon Charnay (p14-15)
   - Selon De Vecchi (p15-16)
   - Notre approche des théories des situations problèmes (p16-17)

4. Les différentes phases d'une situation d'apprentissage
   - Selon Brousseau (p.18)
   - Selon Douady (p.18)
   - Notre approche (p.19)
5. Le rôle de la manipulation

6. Le rôle de la validation

# Enseigner les nombres

1. Les enjeux

Les différents domaines liés aux mathématiques sont : connaissance des nombres entiers, exploitation des données numériques, calcul et grandeurs et mesures. Ils entretiennent des relations entre eux ; la frontière est loin d'être opaque.

Connaissance des nombres entiers :

Le sens du nombre

* Quantifier une collection : aspect cardinal.
* Se situer dans une file : aspect ordinal.
* Comparer, ranger.
* Représenter les nombres sur une droite numérique.

La numération décimale

* Connaître la suite numérique orale et écrite.
* Associer la désignation orale et la désignation écrite.

## 2. Connaissance des nombres entiers

- Le point de vue de quelques chercheurs à propos de la construction du nombre.

Pour évoquer les recherches concernant la construction du nombre, nous nous référons explicitement aux propose de Michel Fayol (1985, 1990).

Deux problématiques différentes apparaissent en ce qui concerne l'abord de la genèse du nombre.

- l'une met l'accent sur l'acquisition de la chaîne numérique, de ses propriétés et donc sur le rôle du comptage ; ⇨ courant empiriste et/ou culturaliste.
- l'autre s'appuie sur le développement des fondements logiques. Le nombre peut exprimer la quantité d'objets d'une collection, d'où l'idée que la construction du nombre est en relation avec la conservation de la quantité. ⇨ rationalisme, recherche de mécanisme cognitifs universels peu ou pas sensibles aux variations culturelles.

Néanmoins, au cours des 20 dernières années, on a pu observer une amorce de synthèse dont voici quelques éléments.

**Selon Piaget**

La correspondance terme à terme entre deux collections n'implique pas la conservation de la quantité. Ainsi si on espace deux collections l'enfant aura l'impression qu'il y en a plus dans celle qui est plus espacée. Il n'a pas toujours conscience non plus que la réunion des parties est égale au tout.
Car il lui manque :

- la classification qui consiste à effectuer des groupes selon des propriétés déterminées.
- La sériation : groupements d'objets selon des propriétés permettant de les ordonner.

Le nombre dans son aspect cardinal pourrait être construit à partir d'activités de classement.
Le nombre dans son aspect ordinal pourrait être construit à partir d'activités de sériation.
Jean Piaget fait l'hypothèse que la mise en place du concept de nombre nécessite l'acquisition de ces deux opérations logiques.
« Pour Piaget, la conservation du nombre, c'est à dire son invariance affirmée malgré les modifications perceptives des modifications, résulte non pas d'un constat inductif, mais d'une déduction » Fayol (L'enfant et le nombre, 1990)

**Selon Gréco et Morf**

Ils ont mis en évidence que les enfants répondent plus facilement à la question « Combien ? » qu'à la question « Où y a-t-il plus de jetons ? » ⇨ cela les amène à accorder un certain rôle au dénombrement dans la mise en place du concept de nombre : « D'abord pratique aveugle et cadeau que la société nous transmet prématurément, c'est un outil » (Structures numériques élémentaires, 1962)

**Selon Fuson, Secada et Hall**

Les expériences qu'ils ont menés auprès d'enfants âgés de 4 ans ½ et 5 ans ½ montrent qu l'utilisation du comptage ou de la correspondance terme à terme permet la réussite aux épreuves de conservation de la quantité.
Ils admettent cependant la conception de Piaget.

Certains chercheurs évoquent trois objections aux conclusions de J.Piaget :

- l'influence du contexte pragmatique qui prend en compte les interactions entre l'adulte et l'enfant, ces dernières pouvant modifier les réponses de ce dernier ;
- L'influence du langage : en liaison avec le point précédent, les formulations utilisées dans les épreuves de conservation du nombre peuvent aussi modifier les réponses des enfants ;
- l'influence des différences perceptives concernant les collections en jeu et qui permettrait de montrer que, contrairement aux conclusions de Piaget, « le jugement relatif aux quantités se

développe non pas selon des stades, mais de manière continue »Fayol, 1990.

**Selon Gelman**

Les pratiques de comptage développé très tôt par les enfants n'impliquent pas une correspondance terme à terme adéquate. On retrouve des erreurs du type :

- défaut de synchronisation entre le geste de la main et la récitation de la comptine ;
- mauvaise organisation du comptage : pas de distinction entre les objets déjà comptés et les objets non encore comptés ;
- reprise du comptage à la question « combien ? » sans étonnement lorsque la réponse n'est pas la même que lors du premier comptage.

**Synthèse de ces points de vue**

Il apparaît clairement que les procédures de dénombrement s'avère relativement précoces.

Piaget conteste le lien avec la conservation tandis que d'autres lui confère un rôle.

Fayol dit : « Une voix semble susceptible de réconcilier ces deux conceptions. Elle consisterait à considérer que l'influence des activités numériques à l'accès à la conservation résulte non de l'impact direct de celles-ci mais plutôt d'une forme de prise de réflexion portant sur les actions et leur coordination », 1990.

## L'apprentissage de la numération

Elle requiert 3 types de connaissances :

- la connaissance de la suite orale des nombres (jusqu'à 100). Un élève peut savoir réciter la comptine numérique sans pour autant donner une signification numérique à chacun des mots qu'il prononce.
- La connaissance de la suite chiffrée des nombres : comprendre en particulier l'algorithme ⇨ mais pour faire le lien entre l'aspect purement algorithmique de l'écriture chiffrée des nombres et le fait que cette dernière désigne une quantité, il est nécessaire de faire apparaître la signification de la position de chacun des chiffres dans l'écriture d'un nombre en terme de groupement par dix.
- La relation entre la désignation orale et l'écriture chiffrée du nombre.

3. Connaissance des fractions et des nombres décimaux
4. Exploitation des données numériques

# DEUXIEME PARTIE

# DOMAINES A ENSEIGNER : ANALYSE ET SITUATIONS PROBLEMES

## 1. Identifier quelques concepts

Plusieurs procédures permettent de comparer deux collections  selon leur quantité. Certains font appel au dénombrement (comptage un en un pour un nombre d'éléments pas trop élevé ou en regroupement par paquet (de dix par exemple)), d'autres s'appuient sur la perception (subitizing ou reconnaissance de constellation ou correspondance terme à terme facilitée par un positionnement des éléments permettant cette procédure). La mobilisation d'une procédure au dépend d'une autre dépend des quantités des collections et de la disposition des éléments de la collection. L'enseignant joue sur ces variables pour bloquer les procédures connues des élèves afin de les amener à en découvrir de nouvelles.

## 2. Analyse du champ conceptuel

### DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Le nombre revêt plusieurs aspects. Certains auteurs tels que K.Fuson (1991) distinguent 3 contextes mathématiques utilisant le nombre :

- cardinal où le mot nombre fait référence à la totalité d'un ensemble d'entités discrètes (une quantité d'éléments d'un ensemble se nomme le cardinal de l'ensemble) ;
- ordinal où le mot nombre fait référence à un élément au sein d'une collection d'éléments ordonnés et décrit la position relative de cet élément ;
- de mesure où le mot nombre réfère à une quantité continue et indique combien d'unités lui correspondent (la mesure d'une grandeur représente aussi une quantité d'éléments mais ces éléments sont des unités étalons).

Cette distinction n'est pas sans ambiguïté.
Ainsi Rémi Brissiaud préfère parler de quantité et de rang plutôt que d'utiliser les termes « cardinal » et « ordinal », tandis que M.Fayol réserve le terme « cardinal » lorsque les quantités sont égales et considère « l'ordinal » lorsqu'il s'agit de déterminer la quantité la plus grande.
Ces désaccords font apparaître que le concept de nombre n'est pas séparable des problèmes qu'il permet de traiter.

Les problèmes relatifs aux nombres entiers naturels sont de deux types :

- ceux qui donnent du sens aux nombres en tant que quantité, mesure ou position ;
- ceux qui relient le nombre et sa désignation.

Les règles de fonctionnement de notre système de numération écrite

Les règles de fonctionnement de notre système de numération orale

La relation d'ordre dans les entiers naturels

LES CLASSES DE PROBLEMES

Classes de problèmes reliant le nombre en tant que signifié avec un signifiant

Pour chaque classe de problème, deux sous-classes peuvent être définies suivant le signifiant en jeu : la désignation orale ou l'écriture chiffrée.

- Indiquer le cardinal d'une collection
- Constituer un collection de cardinal donné
- Constituer une collection de même cardinal qu'une autre collection
- Comparer les cardinaux de 2 collections
- Ordonner des collections en fonctions de leurs cardinaux
- Repérer ou situer sur une ligne graduée, une position.

Classe de problème reliant les deux sortes de signifiants

- Associer l'écriture chiffrée d'un nombre à sa désignation orale ou inversement

Comme dit M-P Noël, ces deux situations regroupées sous le terme de transcodage requièrent un apprentissage de plusieurs années (environ de 5 à 9 ans). La lecture et l'écriture des nombres en chiffres arabes ne sont pas de simples cas particuliers des processus plus généraux de l'écriture et de la lecture des mots. Ils mettent en jeu des processus spécifiques.

LES PROCEDURES DE RESOLUTION

Relier le nombre en tant que signifié avec un signifiant